

稀疏过程下退保相依多险种风险模型的破产概率*

魏 静, 葛世刚, 刘海生

(华北科技学院基础部, 河北 三河 065201)

摘 要: 随着保险业务种类的多样化, 用单一险种来描述风险过程就显得不够, 因此建立多险种的风险模型就尤为必要。考虑到保费收取的随机性和退保风险的可能性, 建立了保费收取和理赔次数均为泊松过程、退保为基于保费收取的 q -稀疏过程的多险种随机风险模型, 通过分析盈余过程的性质, 得到最终破产概率的表达式和破产概率上界的 Lundberg 不等式。

关键词: 多险种; 退保; Poisson 过程; 稀疏过程; 破产概率

中图分类号: O211.6; F840 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2015) 04-0072-03

Ruin Probability of Surrender Dependent Multi-Type Risk Model in Sparse Process

WEI Jing, GE Shigang, LIU Haisheng

(Department of Basic Course, North China Institute of Science and Technology, Sanhe 065201, China)

Abstract: With the diversity of insurance business, the process of risk model by describing with single risk has limitation. So multi-type insurance risk model is particularly necessary. Considering the possibility of premium randomness and surrender risk, a multi-type random risk model is established with the times of premium and claim being Poisson processes, and the surrender being a random q -sparse process of the premium process. By analyzing the properties of the surplus process, it is obtained the expression of ultimate ruin probability and the Lundberg inequality for ruin probability upper bound.

Key words: multi-type insurance; surrender; Poisson process; sparse process; ruin probability

经典的风险模型及其推广^[1-3]只考虑了单一险种的破产问题, 但在实际的保险实务中, 险种往往不是单一的, 随着风险经营规模的不断扩大, 风险经营险种的多样化, 建立多险种风险模型比单一险种更为符合客观实际。近几年一些文章先后考虑了多险种风险模型的破产概率, 龚日朝^[4]将经典风险模型推广为双 Poisson 风险模型, 即保单收入过程是参数为 λt 的 Poisson 过程且与理赔过程独立, 用随机过程和鞅论的方法得到推广后的双 Poisson 风险模型的破产概率公式; 于文广^[5]建立了干扰条件下复合 Poisson-Geometric 过程的多险种风险模

型, 曲中宪^[6]考虑了随机投保费下多险种破产模型, 得到了破产概率的表达式; 王永茂^[7]研究了退保因素影响下多险种风险模型的破产概率, 文中假设不同保单的保费收取服从同一分布, 实际上, 由于险种的多样化, 不同险种保费收取应该是不同分布的; 本文在前人的基础上, 建立了退保过程为基于保费收取的 q -稀疏过程的多险种风险模型, 研究了盈余过程的性质, 验证了调节系数的唯一存在性, 得到了破产概率的表达式和破产上界的 Lundberg 不等式。

* 收稿日期: 2014-11-14

基金项目: 河北省高等学校科学研究计划资助项目 (Z2014032); 华北科技学院重点学科资助基金资助项目 (HKXJZD201402); 中央高校基本科研业务费资助项目 (3142013025, 3142013023, 3142014127)

作者简介: 魏静 (1980年生), 女; 研究方向: 保险精算; E-mail: weijing_jcb@ncist.edu.cn

1 考虑退保的多险种风险模型

考虑到投保人可能会由于某些因素而发生退保的情况，但是由于退保的话对于投保人来说是弊大于利的，所以假设退保的发生是投保次数的随机选择，选择概率为 q ，即退保次数为投保次数的 $q -$ 稀疏过程，建立如下风险模型：

$$U(t) = u + \sum_{k=1}^n c_k M_k(t) - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k^1(t)} X_{ki} - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k^2(t)} Y_{ki}$$

为盈余过程，其中

$$S(t) = \sum_{k=1}^n c_k M_k(t) - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k^1(t)} X_{ki} - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k^2(t)} Y_{ki}$$

为盈利过程，并且有

1) u : $t = 0$ 时刻的盈余，即保险公司的初始准备金；

2) c_k : 第 k 类险种每张保单的保费, $k = 1, 2, \dots, n$;

$M_k(t)$: 第 k 类险种时刻 t 为止收取的保单数, 服从参数为 $\lambda_k t$ 的 Poisson 分布; $k = 1, 2, \dots, n$;

3) X_{ki} : 第 k 类险种第 i 次的理赔额, $i = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, n$; $E(X_{ki}) = \xi_k$; $E(X_{ki}^2) = \gamma_{kX}$;

$N_k^1(t)$: 第 k 类险种时刻 t 为止的理赔次数, 服从参数为 $\beta_k t$ 的 Poisson 分布;

4) Y_{ki} : 第 k 类险种第 i 次的退保额, $i = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, n$; $E(X_k) = \eta_k$; $E(X_k^2) = \gamma_{kY}$;

$N_k^2(t)$: 第 k 类险种时刻 t 为止的理赔次数, 是保费收取次数的 $q -$ 稀疏过程, 即服从参数为 $q\lambda_k t$ 的 Poisson 分布;

5) $\{M_k(t) : t \geq 0, k = 1, 2, \dots, n\}$, $\{N_k^1(t) : t \geq 0, k = 1, 2, \dots, n\}$,

$\{N_k^2(t) : t \geq 0, k = 1, 2, \dots, n\}$, $\{X_{ki} : k = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots\}$,

$\{Y_{ki} : k = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots\}$ 相互独立;

定义破产时刻 $T_u = \inf\{t \mid U(t) < 0\}$, 最终破产概率 $\psi(u) = P\{T_u < \infty \mid U(0) = u\}$, 为使保险公司正常运行, 必须保证收取的平均保费大于平均理赔与平均退保费之和, 即

$$E[S(t)] = E\left[\sum_{k=1}^n c_k M_k(t) - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k^1(t)} X_{ki} - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k^2(t)} Y_{ki}\right] = \sum_{k=1}^n c_k \lambda_k t - \sum_{k=1}^n \xi_k \beta_k t - \sum_{k=1}^n \eta_k \lambda_k q t = t\left(\sum_{k=1}^n c_k \lambda_k t - \xi_k \beta_k - \eta_k \lambda_k q\right) > 0$$

2 主要结论

定理 1 盈余过程 $U(t)$ 的期望 $E[U(t)] = u$

$$+ t\left(\sum_{k=1}^n c_k \lambda_k t - \xi_k \beta_k - \eta_k \lambda_k q\right), \text{ 方差 } \text{Var}[U(t)] = t\left[\sum_{k=1}^n c_k^2 \lambda_k - \sum_{k=1}^n \gamma_{kX} \beta_k - \sum_{k=1}^n \gamma_{kY} \lambda_k q\right].$$

证明 易知 $E[U(t)] = u + t\left(\sum_{k=1}^n c_k \lambda_k t - \xi_k \beta_k - \eta_k \lambda_k q\right)$,

$$\text{Var}[U(t)] = \text{Var}[S(t)] = \sum_{k=1}^n c_k^2 \lambda_k t - \sum_{k=1}^n \beta_k t E(X_k^2) - \sum_{k=1}^n \lambda_k q t E(Y_k^2) = t\left[\sum_{k=1}^n c_k^2 \lambda_k - \sum_{k=1}^n \gamma_{kX} \beta_k - \sum_{k=1}^n \gamma_{kY} \lambda_k q\right]$$

定理 2 对于盈利过程 $\{S(t), t \geq 0\}$, 存在函数 $g(r)$, 使得 $E(e^{-rS(t)}) = e^{tg(r)}$, 并且方程 $g(r) = 0$ 在 $(0, r)$ 上 $r \geq 0$ 存在唯一正解 $R \in (0, r)$, 称 R 为调节系数。

证明

$$E[e^{-rS(t)}] = E\left\{\exp\left[-r\left(\sum_{k=1}^n c_k M_k(t) - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k^1(t)} X_{ki} - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k^2(t)} Y_{ki}\right)\right]\right\} = E\left[\exp\left(-r \sum_{k=1}^n c_k M_k(t)\right)\right] \cdot E\left[\exp\left(r \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k^1(t)} X_{ki}\right)\right] E\left[\exp\left(r \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k^2(t)} Y_{ki}\right)\right] = \exp\left\{t \sum_{k=1}^n [\lambda_k (e^{-rc_k} - 1) + \beta_k (M_{X_k}(r) - 1) + \lambda_k q (M_{Y_k}(r) - 1)]\right\}$$

令

$$g(r) = \sum_{k=1}^n [\lambda_k (e^{-rc_k} - 1) + \beta_k (M_{X_k}(r) - 1) + \lambda_k q (M_{Y_k}(r) - 1)]$$

则 $E(e^{-rS(t)}) = e^{tg(r)}$ 得证。

下证方程 $g(r) = 0$ 在 $(0, r)$ 上 $r \geq 0$ 存在唯一正解。由

$$g(r) = \sum_{k=1}^n [\lambda_k (e^{-rc_k} - 1) + \beta_k (M_{X_k}(r) - 1) + \lambda_k q (M_{Y_k}(r) - 1)] = \sum_{k=1}^n [\lambda_k (e^{-rc_k} - 1) + \beta_k \left(\int_0^\infty e^{rx} dF_{X_k}(x) - 1\right) + \lambda_k q \left(\int_0^\infty e^{ry} dF_{Y_k}(y) - 1\right)]$$

则

$$g'(r) = \sum_{k=1}^n [\lambda_k (-c_k e^{-rc_k}) + \beta_k \int_0^\infty x_k e^{rx} dF_{X_k}(x) + \lambda_k q \int_0^\infty y_k e^{ry} dF_{Y_k}(y)],$$

$$g'(0) = \sum_{k=1}^n [\lambda_k (-c_k) + \beta_k \int_0^\infty x_k dF_{X_k}(x) + \lambda_k q \int_0^\infty y_k dF_{Y_k}(y)]$$

$$\lambda_k q \int_0^\infty \gamma_k dF_{Y_k}(y)] =$$

$$\sum_{k=1}^n (-c_k \lambda_k + \xi_k \beta_k + \eta_k \lambda_k q) =$$

$$- \sum_{k=1}^n (c_k \lambda_k - \xi_k \beta_k - \eta_k \lambda_k q) < 0,$$

$$g''(r) = \frac{d^2 g(r)}{dr^2} = \sum_{k=1}^n [\lambda_k c_k^2 e^{-rc_k} +$$

$$\beta_k \int_0^\infty x_k^2 e^{rx_k} dF_{X_k}(x) + \lambda_k q \int_0^\infty \gamma_k^2 e^{r\gamma_k} dF_{Y_k}(y)] > 0$$

所以 $g'(r)$ 在 $(0, \infty)$ 上单调递增, $g(r)$ 是 $(0, \infty)$ 上的严格单调下凸函数, 又 $\lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = +\infty$, $g(0) = 0$, 于是存在唯一的 $R \in (0, r)$, 使得 $g(R) = 0$.

定理 3 盈余过程 $U(t)$ 的最终破产概率为

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E(e^{-RU(T)} | T < \infty)}$$

证明 对于 $t > 0$ 和 $r > 0$, 有

$$E[e^{-rU(t)}] = E[e^{-rU(t)} | T < t]P(T < t) +$$

$$E[e^{-rU(t)} | T \geq t]P(T \geq t)$$

$$E[e^{-rU(t)}] = e^{-ru}E[e^{-rS(t)}], \text{ 取 } r = R, \text{ 则 } E[e^{-RU(t)}]$$

$$= e^{-Ru} e^{tR} = e^{-Ru}, \text{ 故}$$

$$e^{-Ru} = E[e^{-RU(t)}] = E[e^{-RU(t)} | T < t] \cdot$$

$$P(T < t) + E[e^{-RU(t)} | T \geq t]P(T \geq t) \quad (1)$$

对于给定的 T

$$U(t) = U(T) + \sum_{k=1}^n c_k (M_k(t) - M_k(T)) -$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=N_k(T)+1}^{N_k(t)} X_{ki} - \sum_{k=1}^n \sum_{i=N_k^2(T)+1}^{N_k^2(t)} Y_{ki},$$

$$E[e^{-RU(t)} | T < t]P(T < t) =$$

$$E\{\exp[-RU(T) - R \sum_{k=1}^n c_k (M_k(t) - M_k(T)) +$$

$$R \sum_{k=1}^n \sum_{i=N_k(T)+1}^{N_k(t)} X_{ki} + R \sum_{k=1}^n \sum_{i=N_k^2(T)+1}^{N_k^2(t)} Y_{ki}] | T < t\} \cdot$$

$$P(T < t) = E[e^{-RU(T)} | T < t]E[e^{-RS(t-T)} | T < t] \cdot$$

$$P(T < t) = E[e^{-RU(T)} | T < t]P(T < t)$$

令 $t \rightarrow \infty$, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[e^{-RU(T)} | T < t]P(T < t) =$$

$$E[e^{-RU(T)} | T < \infty]\psi(u)$$

下证 (1) 式右端第二项为 0, 由于

$$E[U(t)] = u + t \left(\sum_{k=1}^n c_k \lambda_k t - \xi_k \beta_k - \eta_k \lambda_k q \right),$$

$$\text{Var}[U(t)] = t \left[\sum_{k=1}^n c_k^2 \lambda_k - \sum_{k=1}^n \gamma_{kX} \beta_k - \sum_{k=1}^n \gamma_{kY} \lambda_k q \right]$$

$$\text{令 } \alpha = \sum_{k=1}^n (c_k \lambda_k - \xi_k \beta_k - q \eta_k \lambda_k), \beta^2 = \sum_{k=1}^n (c_k^2 \lambda_k -$$

$$\gamma_{kX} \beta_k - \gamma_{kY} \lambda_k q);$$

$$E(e^{-RU(t)} | T > t)P(T > t) =$$

$$E(e^{-RU(t)} | T > t, 0 \leq U(t) \leq u + \alpha t - \beta t^{\frac{2}{3}}) \cdot$$

$$P(T > t, 0 \leq U(t) \leq u + \alpha t - \beta t^{\frac{2}{3}}) +$$

$$E(e^{-RU(t)} | T > t, U(t) > u + \alpha t - \beta t^{\frac{2}{3}}) \cdot$$

$$P(T > t, U(t) > u + \alpha t - \beta t^{\frac{2}{3}}) \leq$$

$$P(U(t) \leq u + \alpha t - \beta t^{\frac{2}{3}}) + e^{-R(u + \alpha t - \beta t^{\frac{2}{3}})} \quad (2)$$

由切比雪夫不等式, 得

$$P(U(t) \leq u + \alpha t - \beta t^{\frac{2}{3}}) =$$

$$P(u + \alpha t - U(t) \geq \beta t^{\frac{2}{3}}) \leq \frac{\beta^2 t}{\beta^2 t^{\frac{4}{3}}} = t^{-\frac{1}{3}}$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, (2) 式 $\rightarrow 0$,

$$\text{故 } \psi(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(T < t) = \frac{e^{-Ru}}{E(e^{-RU(T)} | T < \infty)}.$$

推论 1 破产概率的上界 $\psi(u) < e^{-Ru}$.

证明 当 $T < \infty$ 时, 有 $U(T) < 0$, 故而 $E(e^{-RU(T)} | T < \infty) > 1$, 因此 $\psi(u) < e^{-Ru}$.

参考文献:

- [1] GRANDELL J. Aspects of risk theory [M]. New York: Springer Verlag, 1991: 152 - 168.
- [2] FELLER W. An introduction to probability theory and its application [M]. New York: John Wiley & Sons, 1970: 10 - 156.
- [3] 龚日朝, 杨向群. 复合二项风险模型的破产概率[J]. 经济数学, 2001, 18(2): 38 - 42.
- [4] 龚日朝. 在一个推广后的双 Poisson 风险模型下的破产概率[J]. 常德师范学院学报: 自然科学版, 2001, 23(1): 98 - 101.
- [5] 于文广, 黄玉娟. 干扰条件下复合 Poisson-Geometric 过程的多险种风险模型下的破产概率[J]. 山东大学学报: 理学版, 2008, 43(2): 16 - 18.
- [6] 曲中宪, 徐中海, 武文华. 随机投保费下多险种破产模型的研究[J]. 东北师范大学学报: 自然科学版, 2010, 42(1): 18 - 21.
- [7] 王永茂, 高阳, 李杰. 退保因素影响下多险种风险模型的破产概率[J]. 扬州大学学报: 自然科学版, 2012, 15(3): 20 - 22, 26
- [8] 汪嘉冈. 现代概率论基础[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2005: 94 - 185.
- [9] BEWERE N L. 风险理论[M]. 郑韞瑜, 等译. 上海: 上海科学技术出版社, 1995.
- [10] ROSS S M. 随机过程[M]. 何声武, 等译. 北京: 中国统计出版社, 1997.